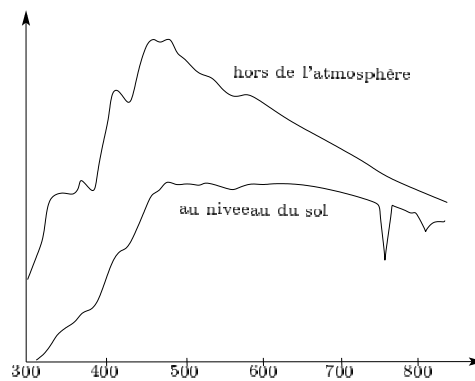


CHAPITRE 2

MODÉLISATION, REPRÉSENTATION ET REPRODUCTION DES COULEURS

2.1 Le phénomène de la couleur

Exemples de DPS



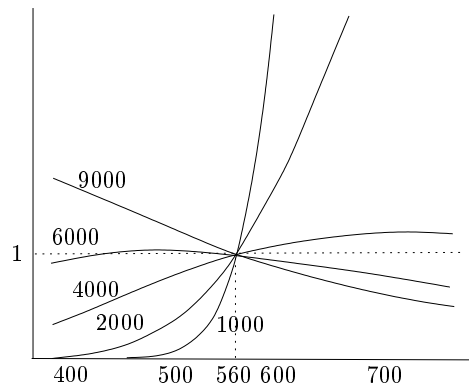
Loi de radiation de Planck.

$$P(\lambda) = \alpha \frac{c_1}{\lambda^5 (e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1)}$$

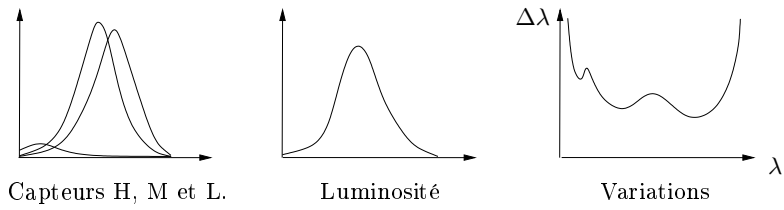
- λ : longueur d'onde
- T : température en degrés kelvins
- $c_1 = 3.7415 \cdot 10^{29}$
- $c_2 = 1.4388 \cdot 10^7$
- $e = 2.718$

Normalisation à 1 pour $\lambda = 560$ nm ([Wyszecki & Stiles])

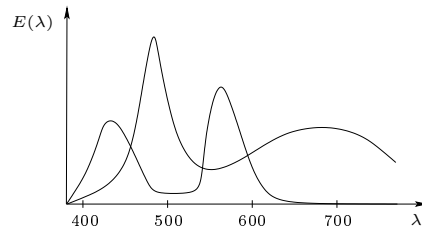
$$P'(\lambda) = \frac{P(\lambda)}{P(560)}$$



Courbes de sensibilité des cônes

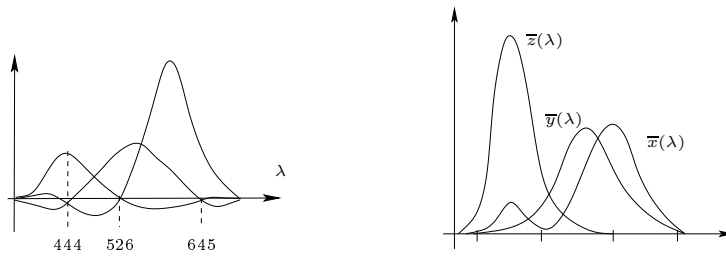


Exemple de spectres métamères



2.2 Colorimétrie

Construction de l'espace XYZ



Couleurs visibles et couleurs reproductibles

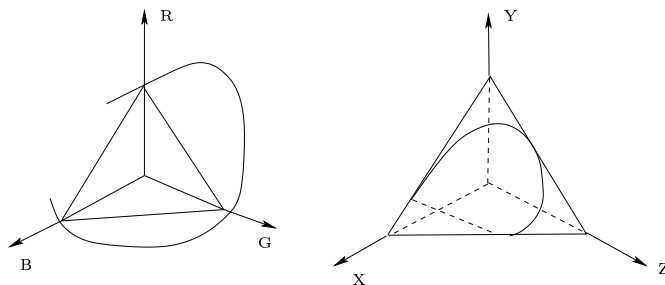
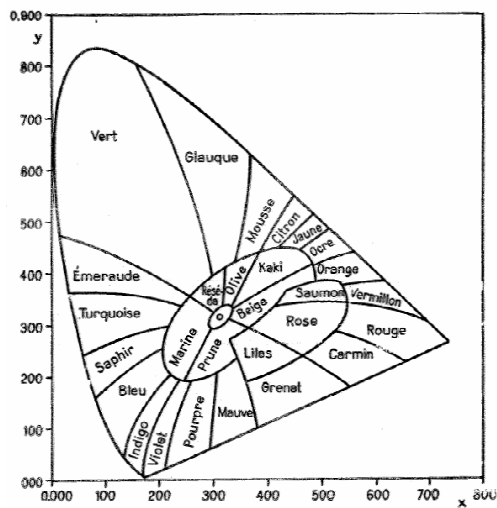
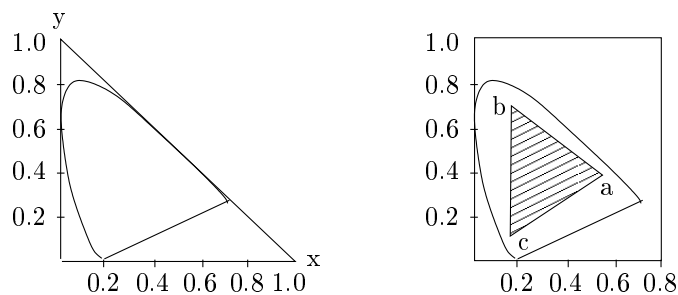


Diagramme chromatique

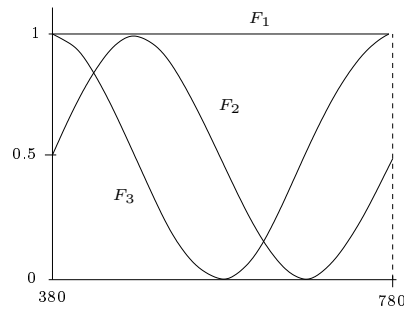


Spectre associé à une couleur. Méthode de Glassner :

$$F_1(\lambda) = 1.0 \tag{2.1}$$

$$F_2(\lambda) = \frac{1}{2} \left(1 + \sin 2\pi \frac{\lambda - 380}{400} \right) \tag{2.2}$$

$$F_3(\lambda) = \frac{1}{2} \left(1 + \cos 2\pi \frac{\lambda - 380}{400} \right) \tag{2.3}$$



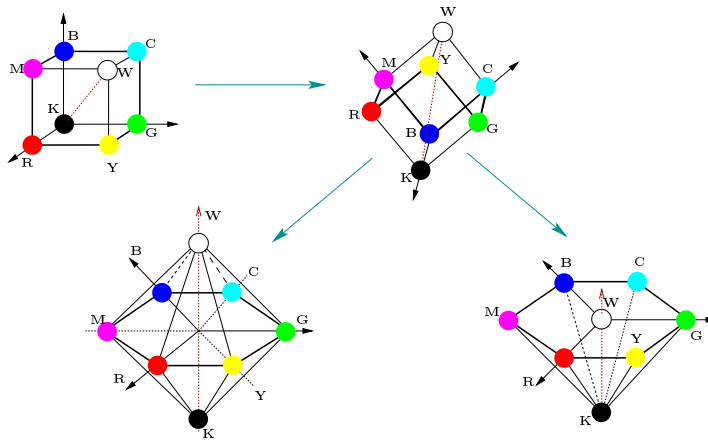
$$D(\lambda) = \alpha_1 F_1(\lambda) + \alpha_2 F_2(\lambda) + \alpha_3 F_3(\lambda)$$

$$M = \begin{pmatrix} \int_{\lambda=380}^{780} F_1(\lambda)\bar{x}(\lambda)d\lambda & \int_{\lambda=380}^{780} F_2(\lambda)\bar{x}(\lambda)d\lambda & \int_{\lambda=380}^{780} F_3(\lambda)\bar{x}(\lambda)d\lambda \\ \int_{\lambda=380}^{780} F_1(\lambda)\bar{y}(\lambda)d\lambda & \int_{\lambda=380}^{780} F_2(\lambda)\bar{y}(\lambda)d\lambda & \int_{\lambda=380}^{780} F_3(\lambda)\bar{y}(\lambda)d\lambda \\ \int_{\lambda=380}^{780} F_1(\lambda)\bar{z}(\lambda)d\lambda & \int_{\lambda=380}^{780} F_2(\lambda)\bar{z}(\lambda)d\lambda & \int_{\lambda=380}^{780} F_3(\lambda)\bar{z}(\lambda)d\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = M^{-1} \times \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

2.3 Systèmes de couleur

Espaces intuitifs



Color naming system

nom-de-couleur ::= *nom-achromatique*
 ::= *nom-chromatique*

nom-achromatique ::= *valeur luminosité*
 ::= *valeur*

valeur ::= *BLANC* | *GRIS* | *NOIR*

luminosité ::= *TRÈS SOMBRE* | *SOMBRE* | *MOYEN* | *CLAIR* | *TRÈS CLAIR*

nom-chromatique ::= *teinte luminosité saturation*
 ::= *teinte saturation luminosité*
 ::= *teinte saturation*
 ::= *teinte luminosité*
 ::= *teinte*

teinte ::= *teinte-générique*
 ::= *demi-teinte*
 ::= *quart-de-teinte*

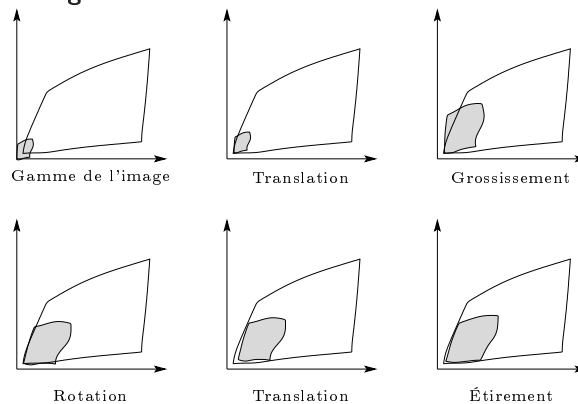
demi-teinte ::= *teinte-générique teinte-générique*

quart-de-teinte ::= *teinte-générique forme-dérivée*

saturation ::= *GRISÂTRE* | *MODÉRÉ* | *SOUTENU* | *VIF*

teinte-générique ::= *ROUGE* | *ORANGE* | *JAUNE* | *VERT* | *BLEU* | *VIOLET*
 | *MARRON*

forme-dérivée ::= *ROUGEÂTRE* | *ORANGÉ* | *JAUNÂTRE*
 | *VERDÂTRE* | *BLEUTÉ* | *POURPRÉ*

Traitement des défauts de gamme.

XYZ \rightarrow **L*** : commun à $L^*a^*b^*$ et $L^*u^*v^*$.

$$L^* = \begin{cases} 116 \left(\frac{Y}{Y_N} \right)^{\frac{1}{3}} - 16, & \text{si } \frac{Y}{Y_N} > 0.008856 \\ 903.3 \frac{Y}{Y_N} & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} \left(\frac{L^*+16}{116} \right)^3 Y_N, & \text{si } L^* > 7.99968 \\ \frac{L^* Y_N}{903.3} & \text{sinon.} \end{cases}$$

XYZ \rightarrow a^*b^* .

$$a^* = 500 \left(f \left(\frac{X}{X_N} \right) - f \left(\frac{Y}{Y_N} \right) \right)$$

$$b^* = 200 \left(f \left(\frac{Y}{Y_N} \right) - f \left(\frac{Z}{Z_N} \right) \right)$$

$$f(t) = \begin{cases} t^{\frac{1}{3}}, & \text{si } t > 0.008856 \\ 7.787t + \frac{16}{116} & \text{sinon.} \end{cases}$$

a^*b^* \rightarrow **XYZ**.

$$f_y = \frac{L^* + 16}{116}$$

$$f_x = f_y + \frac{a^*}{500}$$

$$f_z = f_y - \frac{b^*}{200}$$

$$X = \begin{cases} X_N f_x^3, & \text{si } f_x^3 > 0.008856 \\ \frac{1}{7.787} X_N \left(f_x - \frac{16}{116} \right) & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$Z = \begin{cases} Z_N f_z^3, & \text{si } f_z^3 > 0.008856 \\ \frac{1}{7.787} Z_N \left(f_z - \frac{16}{116} \right) & \text{sinon.} \end{cases}$$

XYZ \rightarrow u^*u^* .

$$d = X + 15Y + 3Z$$

$$u' = \frac{4X}{d}$$

$$v' = \frac{9Y}{d}$$

$$d_N = X_N + 15Y_N + 3Z_N$$

$$u'_N = \frac{4X_N}{d_N}$$

$$v'_N = \frac{9Y_N}{d_N}$$

$$u^* = 13L^*(u' - u'_N)$$

$$v^* = 13L^*(v' - v'_N)$$

$u^*v^* \rightarrow \mathbf{XYZ}$.

$$\begin{aligned}d_N &= X_N + 15Y_N + 3Z_n \\u'_N &= \frac{4X_N}{d_N} \\v'_N &= \frac{9Y_N}{d_N} \\u' &= u'_N + \frac{u^*}{13L^*} \\v' &= v'_N + \frac{v^*}{13L^*} \\X &= \frac{9u'}{4v'}Y \\Z &= \begin{cases} \frac{1}{3}\left(\frac{4X}{u'} - X - 15Y\right) \\ -\frac{X}{3} - 5Y + \frac{3Y}{v'} \end{cases}\end{aligned}$$

RGB/HSV

```
V = max(R, G, B)
m = min(R, G, B)
Δ = V - m
si (Δ < ε)
    S = 0, h = indéfini
sinon
{
    S = Δ / V
    si (R == V)
        H = (G - B) / Δ
    sinon si (G == V)
        h = 2 + (B - R) / Δ
    sinon
        h = 4 + (R - G) / Δ
    H = 60 * H
    if (H < 0)
        H = H + 360
}
```

RGB/HLS

```
M = max(R, G, B)
m = min(R, G, B)
Δ = M - m
L = (M + m) / 2
si (M - m < ε)
    S = 0, H = indéfini
sinon
{
    S = (L ≤ 1/2) ? Δ / (M + m) : Δ / (2 - M - m)
    si (R == M)
        H = 60 * (G - B) / Δ
```

```

sinon si (G == M)
    H = 60(2 +  $\frac{(B - R)}{\Delta}$ )
sinon
    H = 60(4 +  $\frac{(R - G)}{\Delta}$ )
si (H < 0)
    H += 360
}

```

HSV/RGB $([0..360] \times [0, 1] \times [0, 1]) \rightarrow [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$

```

H =  $\frac{H}{60}$ 
i =  $\lfloor H \rfloor$ 
f = H - i
m = V(1 - S)
n = V(1 - S*f)
p = V(1 - (S(1 - f)))
(R, G, B) =
    si (i == 0) alors (V, p, m)
    si (i == 1) alors (n, V, m)
    si (i == 2) alors (m, V, p)
    si (i == 3) alors (m, n, V)
    si (i == 4) alors (p, n, V)
    si (i == 5) alors (V, m, n)

```

HLS/RGB $([0..360] \times [0, 1] \times [0, 1]) \rightarrow [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$

```

si (S < ε)
    R = G = B = L
sinon
{
    si (L ≤  $\frac{1}{2}$ )
        V = L(1 + S)
    sinon
        V = L + (1 - L)S

    H =  $\frac{H}{60}$ 
    i =  $\lfloor H \rfloor$ 
    m = 2*1 - V;
    t = (H - i)(V - m)
    n = V - t
    p = m + t

    comme HSV → RGB
}

```


2.4 Calibrage des périphériques

Conversion XYZ/RGB. Recommandation CCIR REC-709, avec l'illuminant D_{65} .

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.412453 & 0.357580 & 0.180423 \\ 0.212671 & 0.715160 & 0.072169 \\ 0.019334 & 0.119193 & 0.950227 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{709} \\ G_{709} \\ B_{709} \end{pmatrix}$$

Transformation réciproque :

$$\begin{pmatrix} R_{709} \\ G_{709} \\ B_{709} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.240479 & -1.537150 & -0.498535 \\ -0.969256 & 1.875992 & 0.041556 \\ 0.055648 & -0.204043 & 1.057311 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

Utilisation des coordonnées chromatiques.

$$\Delta = x_R(y_G - y_B) - x_G(y_R - y_B) + x_B(y_R - y_G)$$

$$\begin{cases} X_R = \frac{x_B}{y_N} K_R \\ Y_R = \frac{y_R}{y_N} K_R \\ Z_R = \frac{1 - x_R - y_R}{y_N} K_R \end{cases} \quad \text{avec } K_R = \frac{x_G(y_B - y_N) - x_B(y_G - y_N) + x_N(y_G - y_B)}{\Delta}$$

$$\begin{cases} X_G = -\frac{x_G}{y_N} K_G \\ Y_G = -\frac{y_G}{y_N} K_G \\ Z_G = -\frac{1 - x_G - y_G}{y_N} K_G \end{cases} \quad \text{avec } K_G = \frac{x_R(y_B - y_N) - x_B(y_R - y_N) + x_N(y_R - y_B)}{\Delta}$$

$$\begin{cases} X_B = \frac{x_B}{y_N} K_B \\ Y_B = \frac{y_B}{y_N} K_B \\ Z_B = \frac{1 - x_B - y_B}{y_N} K_B \end{cases} \quad \text{avec } K_B = \frac{x_R(y_G - y_N) - x_G(y_R - y_N) + x_N(y_R - y_G)}{\Delta}$$

Bibliographie

- [1] Claude Bonnet, editor. *La perception visuelle*. Pour la Science – Belin, 1984. ISBN 2-902918-32-1.
- [2] M. Déribéré. *La couleur*. Que saisje? Presses universitaires de France, 1989. sixième édition.
- [3] E.J. Giorgianni and Th. E. Madden. *Digital Color Management*. Addison-Wesley, 1998.
- [4] A. Glassner. *Principles of Digital Image Synthesis*. Morgan-Kaufmann Publishers, 199.
- [5] R.W. G. Hunt. *The reproduction of colour – 5th ed.* Fountain Press, 1995.
- [6] H. Johnson. *Mastering Digital Printing*. Muska & Lipman, 2003.
- [7] P.K. Kaiser and R.M.Boynton. *Human color vision*. Optical Society of America, 1996. second edition.
- [8] K. Kilander and O. Kilander. *The Gimp User Manual*. Coriolis, 1999.
- [9] Ch. Poynton. Color faq. <http://www.poynton.com/ColorFAQ.html>.
- [10] Ch. Poynton. Gamma faq. <http://www.poynton.com/GammaFAQ.html>.
- [11] Ch. Poynton. *A Technical Introduction to Digital Video*. John Wiley & Sons, 1996.
- [12] G. Sharma. *Digital Color Imaging*. CRC Press, 2003.
- [13] A. Trémeau, C. Fernandez-Maloigne, and P. Bonton. *Image numérique couleur*. Dunod, 2004.
- [14] G. Wyszecki and W.S. Stiles. *Color Science*. John Wiley & Sons, 2000. second edition.

CHAPITRE 3

TRANSFORMATIONS D'IMAGE

3.1 Généralités

$$\Psi : I \rightarrow \Psi(I) = I'$$

- transformation **idempotente** : $\Psi \circ \Psi = \Psi$
- transformations **duales** : $\Psi = \mathbb{C}\Phi\mathbb{C}$.
- transformation **croissante** : $\forall I, \forall J, I \leq J \Rightarrow \Psi(I) \leq \Psi(J)$

3.2 Traitement des images multibandes

Approche marginale.

Possibilité de passer par des modèles dans lesquels les composantes sont décorrélées :

- $(r, g, b) \rightarrow (h, s, v) \rightarrow (h, s, v') \rightarrow (r', g', b')$
- $(r, g, b) \rightarrow (l, a, b) \rightarrow (l', a, b) \rightarrow (r', g', b')$
- $(r, g, b) \rightarrow (h, s, v) \rightarrow (h, s', v) \rightarrow (r', g', b')$

Approche vectorielle.

- médian \vec{v} d'un ensemble de vecteurs $V = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$:

$$v \in V / \sum_{\vec{v}' \in V} \|\vec{v}' - \vec{v}\| = \min_{\vec{v}' \in V} \sum_{\vec{v}'' \in V} \|\vec{v}' - \vec{v}''\|$$

$$\arg \min_{\vec{v}'' \in V} \sum_{\vec{v}' \in V} \|\vec{v}' - \vec{v}''\|$$

- pré-ordre ($a \leq b$ et $b \leq a \not\Rightarrow a = b$)
- distance par rapport à un ensemble de vecteurs $\{c_1, \dots, c_n\}$:

$$c_i \leq c_j \Leftrightarrow \sum_k d(c_i, c_k) \leq \sum_k d(c_j, c_k)$$

- ordre partiel :

$$(r, g, b) < (r', g', b') \Leftrightarrow r < r', g < g', b < b'$$

- ordre total : possibilité d'entrelacement :

$$\overline{r_M r_{M-1} \dots r_1} \overline{g_M g_{M-1} \dots g_1} \overline{b_M b_{M-1} \dots b_1} \rightarrow \overline{r_M g_M b_M r_{M-1} g_{M-1} b_{M-1} \dots r_1 g_1 b_1}$$

3.3 Transformations ponctuelles

3.3.1 Principe

$$\Psi : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \quad (\text{ou } [0..i_{max}] \rightarrow [0..i_{max}])$$

- indépendantes de l'image à transformer :

$$I'(p) = \psi(I(p))$$

- dépendantes de propriétés globales de l'image

$$I'(p) = \psi_I(I(p))$$

3.3.2 Exemples

- complément ou inversion :

$$\mathcal{C}(i) = 1 - i \quad (\text{ou } i_{max} - i)$$

- seuillage (*thresholding*)

$$T_{[i_m, i_M]}(i) = \begin{cases} 1, & \text{si } i_m \leq I(p) \leq i_M, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3.4 Transformations locales.

- indépendantes de l'image à transformer :

$$I'(p) = \psi(I(p_1), \dots, I(p_k))$$

- dépendantes de propriétés globales de l'image

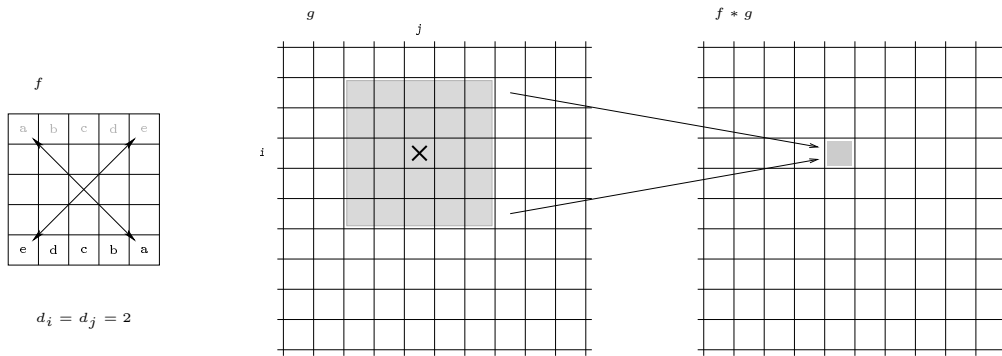
$$I'(p) = \psi_I(I(p_1), \dots, I(p_k))$$

Convolutions

$$(f * g)(x, y) = \int \int f(u, v) g(x - u, y - v) du dv$$

$$(f * g)(i, j) = \sum_{i'=-D_i}^{D_i} \sum_{j'=-D_j}^{D_j} f(i', j') g(i - i', j - j')$$

```
fg[i][j] = 0;
for (int ip = -di; ip <= di; ip++)
  for (int jp = -dj; jp <= dj; jp++)
    fg[i][j] += f[ip + di][jp + dj]*g[i - ip][j - jp]
```



3.4.1 Filtres d'ordre

- $V_I(p) = \{p_1, \dots, p_k\}$
- $\{i_1, \dots, i_k\}$
- $(i_{(1)}, \dots, i_{(k)})$

$$I'(p) = \psi(i_{(1)}, \dots, i_{(k)})$$

3.4.2 Transformations morphologiques

Rappels mathématiques

- opérations ensemblistes :

$$A \cap B = \{x \in A \text{ et } x \in B\}$$

$$A \cup B = \{x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

$$\mathcal{C}(A) = \{x \notin A\}$$

$$A - B = A \cap \mathcal{C}(B)$$

- ensemble partiellement ordonné :

$$1) x \leq x$$

$$2) x \leq y, y \leq x \Leftrightarrow x = y$$

$$3) x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z$$

- treillis complet : ensemble partiellement ordonné $\langle E, \leq \rangle$ dont toute famille de E possède une plus petite borne supérieure et une plus grande borne inférieure.

Élément structurant

- X_p : translation de l'élément structurant X au point p
- \tilde{X} : symétrie de l'élément structurant X par rapport à l'origine

Érosion et dilatation d'un ensemble de points

- érosion

$$\varepsilon_X(E) = \{p/X_p \subseteq E\}$$

$$\varepsilon_X(E) = \bigcap_{x \in X} E_{-x}$$

– dilatation

$$\begin{aligned}\delta_X(E) &= \{p/X_p \cap E \neq \emptyset\} \\ \delta_X(I) &= \bigcup_{x \in X} I_{-x}\end{aligned}$$

– opérateurs de Minkowski :

$$\begin{aligned}A \oplus B &= \{a + b, a \in A \text{ et } b \in B\} \\ A \ominus B &= \{x, \forall b \in B, x + b \in A\} \\ \delta_X(E) &= E \oplus \check{X} \\ \varepsilon_X(E) &= E \ominus \check{X}\end{aligned}$$

Quelques propriétés des opérateurs élémentaires

– dualité

$$\begin{aligned}E \oplus \check{X} &= \mathbb{C}(\mathbb{C}(E) \ominus \check{X}) \\ E \ominus \check{X} &= \mathbb{C}(\mathbb{C}(E) \oplus \check{X}) \\ &\text{d'où} \\ \delta_X(E) &= \mathbb{C}(\varepsilon_X(\mathbb{C}(E))) \\ \varepsilon_X(E) &= \mathbb{C}(\delta_X(\mathbb{C}(E)))\end{aligned}$$

– associativité

$$\begin{aligned}(E \oplus A) \oplus B &= E \oplus (A \oplus B) \\ &\text{d'où} \\ \delta_{X \oplus Y}(E) &= \delta_Y(\delta_X(E))\end{aligned}$$

– extensivité / anti-extensivité

$$\begin{aligned}E &\subset \delta_X(E) \\ \varepsilon_X(E) &\subset E\end{aligned}$$

– itérativité

$$\begin{aligned}\varepsilon_Y(\varepsilon_X(E)) &= \varepsilon_{\delta_Y(X)}(E) \\ \delta_Y(\delta_X(E)) &= \delta_{\delta_Y(X)}(E)\end{aligned}$$

Ouverture et fermeture

– ouverture

$$\begin{aligned}\gamma_X &= \delta_{\check{X}} \circ \varepsilon_X \\ \gamma_X(E) &= \bigcup_p \{X_p | X_p \subseteq E\}\end{aligned}$$

– fermeture

$$\begin{aligned}\varphi_X &= \varepsilon_{\check{X}} \circ \delta_X \\ \varphi_X(E) &= \bigcap_p \{\mathbb{C}(X_p) | E \subseteq \mathbb{C}(X_p)\}\end{aligned}$$

- propriétés :
 - $\gamma \leq I \leq \varphi$
 - $\gamma_X = \mathbf{C}\varphi_X\mathbf{C}$
 - $f \leq g \Rightarrow \gamma(f) \leq \gamma(g)$
 - $f \leq g \Rightarrow \varphi(f) \leq \varphi(g)$
 - $\gamma\gamma = \gamma$
 - $\varphi\varphi = \varphi$

Extension aux images monochromes

- maximum :

$$(I \vee J)(p) = \max\{I(p), J(p)\}$$

- minimum :

$$(I \wedge J)(p) = \min\{I(p), J(p)\}$$

$$\begin{cases} (\bigvee_{I \in \mathcal{I}} I)(p) = \max_{I \in \mathcal{I}}(I(p)) \\ (\bigwedge_{I \in \mathcal{I}} I)(p) = \min_{I \in \mathcal{I}}(I(p)) \end{cases}$$

- coupe :

$$\mathbf{CS}_i = T_{[i, i_{max}]}$$

$$\mathbf{CS}_{i_{max}}(I) \subseteq \mathbf{CS}_{i_{max}-1}(I) \subseteq \dots \subseteq \mathbf{CS}_0(I)$$

- superposition des coupes

$$I(p) = \sum_{i=1}^{i_{max}} \mathbf{CS}_i(I)(p) = \max\{i / \mathbf{CS}_i(I)(p) \neq 0\}$$

$$I \leq J \Leftrightarrow \forall i, \mathbf{CS}_i(I) \subseteq \mathbf{CS}_i(J)$$

$$\begin{cases} I \vee J = \sum_{i=1}^{i_{max}} \mathbf{CS}_i(I) \cup \mathbf{CS}_i(J) \\ I \wedge J = \sum_{i=1}^{i_{max}} \mathbf{CS}_i(I) \cap \mathbf{CS}_i(J) \end{cases}$$

- extension des opérateurs

$$\varepsilon_X(I) = \bigwedge_{x \in X} I_{-x}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_X(I)(p) &= \left(\bigwedge_{x \in X} I_{-x} \right)(p) \\ &= \min_{x \in X} (I_{-x}(p)) \\ &= \min_{x \in X} I(p+x) \end{aligned}$$

$$\delta_X(I) = \bigvee_{x \in X} I_{-x}$$

$$\delta_X(I)(p) = \max_{x \in X} I(p+x)$$

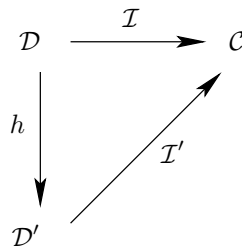
3.5 Transformations globales

Rappel : théorème de convolution.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f * g) &= \mathcal{F}(f) \times \mathcal{F}(g) \\ f * g &= \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f) \times \mathcal{F}(g)) \end{aligned}$$

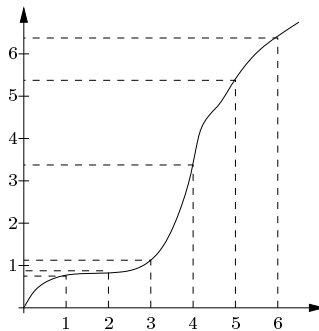
3.6 Transformations de domaine

transformations continues



$$H(\mathcal{I}) = \mathcal{I}' = \mathcal{I} \circ h^{-1}$$

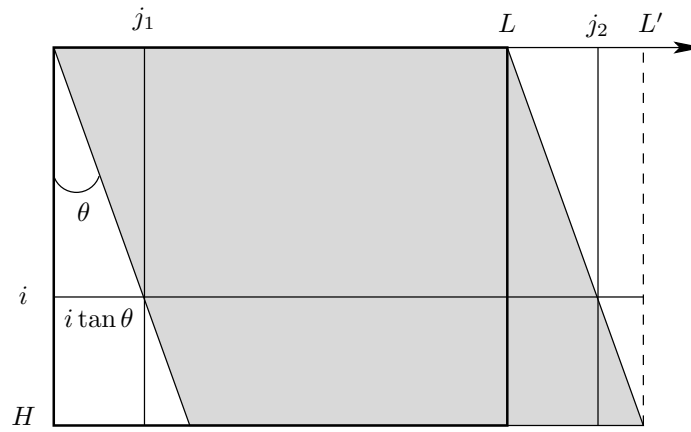
Transformations discrètes



- * contraction : $\{1, 2, 3\} \rightarrow 1$
- * trous : 2, 4.

Cisaillements

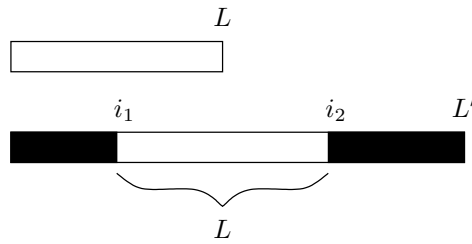
$$(i, j) \rightarrow (i + j \tan \theta, j)$$



- sans anti-aliasing

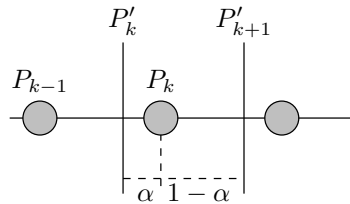
$$i_1 = \lceil j \tan \theta \rceil$$

$$i_2 = i_1 + L$$



- 1) $I'_j[0], \dots, I'_j[i_1 - 1] \leftarrow 0$
- 2) $I'_j[i_1] \leftarrow I_j[0], \dots, I'_j[i_1 + L - 1] \leftarrow I_j[L - 1]$
- 3) $I'_j[i_2], \dots, I'_j[L'] \leftarrow 0$

- avec anti-aliasing



$$\alpha = j \tan \theta - \lfloor j \tan \theta \rfloor$$

$$\begin{cases} P'_0 &= \alpha P_0 \\ P'_k &= (1 - \alpha)P_{k-1} + \alpha P_k \\ P'_{L+1} &= (1 - \alpha)P_L \end{cases}$$

3.6.1 Rotations

Transformation continue

$$M = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Transformations multipasses

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha = \gamma = \frac{\cos \theta - 1}{\sin \theta} \\ \beta = \sin \theta \end{cases}$$

On récrit $\frac{\cos \theta - 1}{\sin \theta}$ en $\tan \frac{\theta}{2}$, plus stable autour de zéro :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -\tan \frac{\theta}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sin \theta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\tan \frac{\theta}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

soit encore :

$$\begin{cases} x = x - y \tan \frac{\theta}{2} \\ y = y - x \sin \theta \\ x = x - y \tan \frac{\theta}{2} \end{cases}$$

CHAPITRE 4

TRAITEMENTS QUALITATIFS

4.1 Transformations basiques

Seuillages

$$T_{[i_m, i_M]}(i) : [0, 1] \rightarrow \{0, 1\}$$

$$T_{[i_m, i_M]}(i) = \begin{cases} i_1, & \text{si } i_m \leq I(p) \leq i_M, \\ i_2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$T_{[i_m, i_M]}(i) = \begin{cases} i_1, & \text{si } i_m \leq I(p) \leq i_M, \\ i & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$T_I(i) = \begin{cases} 1, & \text{si } I(p) \leq \mu(V(P)), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

4.2 Luminosité et contraste

Caractérisation

Contraste entre deux points

$$c(p_1, p_2) = \frac{|I(p_1) - I(p_2)|}{N - 1}, \quad N : \text{niveaux de gris}$$

$$c(p_1, p_2) = \frac{|I(p_1) - I(p_2)|}{\max\{I(p_1), I(p_2)\}}$$

Contraste d'une région

$$C_{int}(R) = \frac{1}{|R|} \sum_{p_1 \in R} \max_{p_2 \in V(p_1) \cap R} \{c(p_1, p_2)\}$$

$$C_{ext}(R) = \frac{1}{|\mathbf{Front}(R)|} \sum_{p_1 \in \mathbf{Front}(R)} \max_{p_2 \in V(p_1), p_2 \notin R} \{c(p_1, p_2)\}$$

$$C(R) = \begin{cases} 1 - \frac{C_{int}(R)}{C_{ext}(R)} & \text{si } C_{int}(R) < C_{ext}(R) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Contraste local.

$$c(p) = \frac{|I(p) - f(V(p))|}{I(p) + f(V(p))}$$

$$f(R) = \frac{\sum_{p \in R} g(\nabla I(p)) \times I(p)}{\sum_{p \in R} g(\nabla I(p))}$$

$$g(\vec{x}) = \|\vec{x}\|$$

Histogramme.

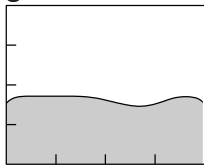


image
très contrastée

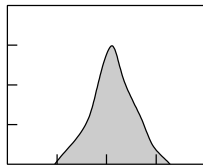


image
peu contrastée

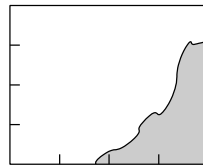


image
claire

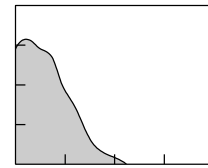


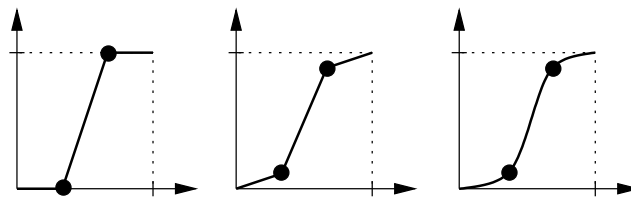
image
sombre

Transformations de base

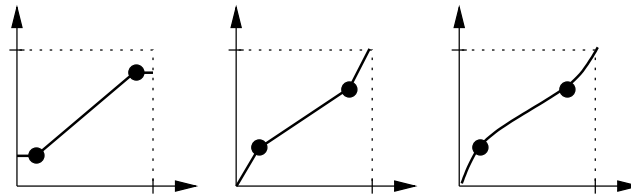
$$\Psi(I) = I^\gamma$$

$$\Psi(i) = K \log(1 + I)$$

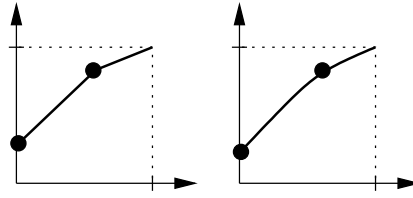
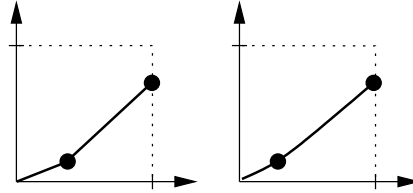
Transformations définies par morceau



Augmentation (*sharp*)



Atténuation (*dull*)

Luminosité.Augmentation (*brite*)Aténuation (*dim*)**Normalisation (étirement d'histogramme)**

$$\tau_{m,M}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < m \\ 1 & \text{si } x > m \\ x & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$f_{m,M}(x) = \left(\frac{\tau_{m,M}(x) - m}{M - m} \right)$$

$$f_{m,m}(x) = 0 \text{ si } x \leq m \text{ et } 1 \text{ sinon.}$$

$$N_{m,M,m',M'}(x) = f_{m,M}(x)(M' - m') + m'$$

$$m = \min \left\{ k, \left| \sum_{i=0}^k \frac{h(i)}{N} - \varepsilon \right| < \left| \sum_{i=0}^{k+1} \frac{h(i)}{N} - \varepsilon \right| \right\} + 1$$

$$M = \max \left\{ k, \left| \sum_k^{i_{max}} \frac{h(i)}{N} - \varepsilon \right| < \left| \sum_{i=k-1}^{i_{max}} \frac{h(i)}{N} - \varepsilon \right| \right\} - 1$$

$$N_{m,M,m',M'}^\gamma(x) = f_{m,M}(x)^\gamma (M' - m') + m'$$

Égalisation (ou aplatissement) d'histogramme.

$$\forall i < i_{max}, K = \left[\frac{\sum_{k=1}^{i_{max}} h(k)}{i_{max}} \right]$$

$$\forall i, 0 < i < i_{max}, h_{I'}(i) = K$$

$$h_{I'} = \left(\sum_{k=1}^{i_{max}} h(k) \right) \bmod i_{max}$$

Équilibrage d'histogramme

$$H(I) = \sum_{i=0}^I \frac{h(i)}{M}$$

Spécification d'histogramme.

$$H_1(u) = \int_0^u p_u(x) dx$$

$$H_2(w) = \int_0^w p_w(x) dx$$

$$H_2(u) = H_1(w)$$

et

$$T(u) = H_2^{-1}(H_1(u))$$

Utilisation de moments statistiques

$$\mu(I) = \sum_i i \times p(i)$$

$$\sigma(I)^2 = \sum_i (i - \mu(I))^2 \times p(i)$$

$$p(i) = \frac{h(i)}{\sum_i h(i)}$$

$$I'(p) = \begin{cases} K \times I(p) & \text{si } \mu(V_I(p)) \leq k_0 \mu(I) \text{ et } k_1 \sigma(I) \leq \sigma(V_I(p)) \leq k_2 \sigma(I) \\ I(p) & \text{sinon} \end{cases}$$

4.3 Traitements chromatiques

4.3.1 Désaturation

Désaturation totale.

$$n = Y_{RCR} + Y_{GCG} + Y_{BCB}$$

Pour REC 709 avec D65 :

$$Y_R \simeq 0.213$$

$$Y_G \simeq 0.715$$

$$Y_B \simeq 0.072$$

Désaturation progressive :

$$T = \begin{pmatrix} (1-s)Y_R + s & (1-s)Y_G & (1-s)Y_B \\ (1-s)Y_R & (1-s)Y_G + s & (1-s)Y_B \\ (1-s)Y_R & (1-s)Y_G & (1-s)Y_B + s \end{pmatrix}$$

4.3.2 Équilibrage des couleurs

Sélection d'un point neutre

Pour $c = (r, g, b)$, trouver $(\gamma_R, \gamma_G, \gamma_B)$ t.q.

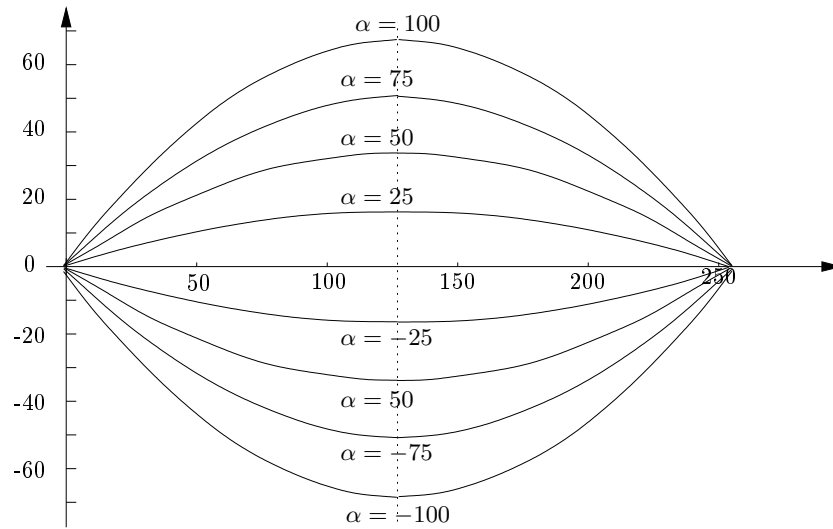
$$r^{\gamma_R} = g^{\gamma_G} = b^{\gamma_B} = Y_{Rr} + Y_{Gg} + Y_{Bb}$$

$$\gamma_x = \frac{\log n}{\log x}$$

$$\begin{aligned} x^{\gamma_x} &= x^{\frac{\log n}{\log x}} \\ &= e^{\frac{\log n}{\log x} \log x} \\ &= e^{\log n} \\ &= n \end{aligned}$$

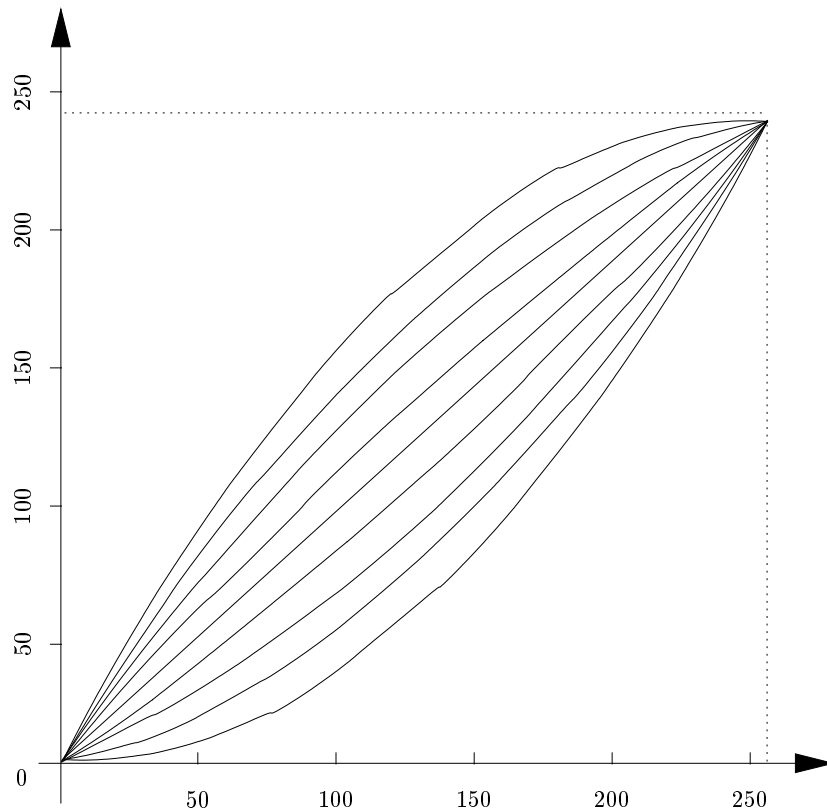
Équilibrage selon les axes chromatiques

$$f_\alpha(x) = \alpha \frac{2}{3} \left(1 - \left(\frac{x-127}{127} \right)^2 \right) \quad \text{pour } \alpha \text{ variant entre } -100 \text{ et } 100$$



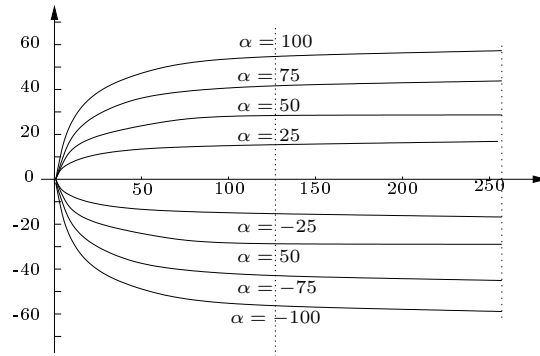
Graphique de la fonction de correction additive pour différentes valeurs de α

$$x \rightarrow x + f_{\alpha}(x)$$



Fonction de transformation de canal
pour $\alpha = 100, 75, 50, 25, 0, -25, -50, -75$ et -100

$$g'_{\alpha}(x) = \alpha \times 1.075 \frac{16}{16 + x}$$



Graphique de la fonction de correction additive pour différentes valeurs de α

$$g''_{\alpha}(x) = g_{\alpha}(255 - x)$$

Constance des couleurs

Modèle diagonal.

$$S_r = \int_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} S(\lambda)r(\lambda)d\lambda$$

$$S_g = \int_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} S(\lambda)g(\lambda)d\lambda$$

$$S_b = \int_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} S(\lambda)b(\lambda)d\lambda$$

$$\begin{pmatrix} \frac{N_r}{S_r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{N_g}{S_g} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{N_b}{S_b} \end{pmatrix}$$

Hypothèse du monde gris.

$$\bar{r} = \frac{\sum_{i,j} I_r(i,j)}{N}$$

$$\bar{g} = \frac{\sum_{i,j} I_g(i,j)}{N}$$

$$\bar{b} = \frac{\sum_{i,j} I_b(i,j)}{N}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{G_r}{\bar{r}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{G_g}{\bar{g}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{G_b}{\bar{b}} \end{pmatrix}$$

$$\bar{x} = \left(\frac{\sum_{i,j} I_r^p(i,j)}{N} \right)^{\frac{1}{p}}$$

avec $p = 6$.

Hypothèse du max.

$$\begin{pmatrix} \frac{W_r}{r_{max}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{W_g}{g_{max}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{W_b}{b_{max}} \end{pmatrix}$$

4.3.3 Colorisation

Fausses couleurs

$$[0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$$

Transfert de couleurs

$$\begin{pmatrix} L \\ M \\ S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3811 & 0.5783 & 0.0402 \\ 0.1967 & 0.7244 & 0.0782 \\ 0.0241 & 0.1288 & 0.8444 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L} = \log L$$

$$\mathcal{M} = \log M$$

$$\mathcal{S} = \log S$$

$$\begin{pmatrix} l \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{L} \\ \mathcal{M} \\ \mathcal{S} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{L} \\ \mathcal{M} \\ \mathcal{S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -2\frac{\sqrt{6}}{6} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.4679 & -3.5873 & 0.1193 \\ -1.2186 & 2.3809 & -0.1624 \\ 0.0497 & -0.2439 & 1.2045 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L \\ M \\ S \end{pmatrix}$$

Colorisation d'images monochromes (locale).

$$\sum_{p' \in V(p)} (I(p) - J(p'))^2$$

4.4 Lissages

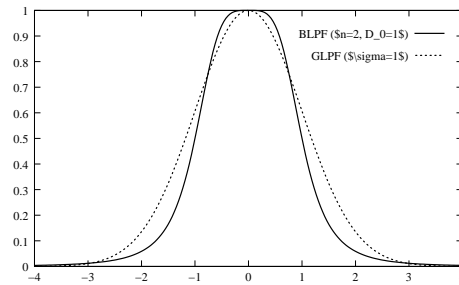
Gaussien passe-bas.

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{D^2(u, v)}{2\sigma^2}\right)$$

Butterworth d'ordre n.

$$H_n(u, v) = \frac{1}{1 + \left(\frac{D(u, v)}{D_0}\right)^{2n}}$$

$$D(u, v) = \sqrt{u^2 + v^2}$$

Comparaison entre BLPF et GLPF**Gaussienne.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots \\ 7 & 11 & & \\ & & 17 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ & 1 & 2 & 3 & 3 & \\ & & 3 & 6 & 7 & \\ & & & 9 & 11 & \\ & & & & 12 & \end{pmatrix}$$

$$f(i, j) = f_i(i) \times f_j(j)$$

$$I * f = (f_i \times f_j) * I = (I * f_i) * f_j$$

Binomial.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\begin{array}{l} 1 : 1 \quad 1 \\ 2 : 1 \quad 2 \quad 1 \\ 3 : 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ 4 : 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \end{array}$$

Filtre 3 × 3 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Moyennes seuillées.

$$\mu = \frac{1}{|V(P)|} \sum_{i,j \in V(P)} I(i, j)$$

$$I'(x, y) = \begin{cases} \mu & \text{si } I(x, y) - \mu < \sigma \\ I(x, y) & \text{sinon} \end{cases}$$

Filtrage récursif.

$$I'(p) = a_0 I(p) + a_1 I(p-1) + a_2 I(p-2) + \dots \\ + b_1 I'(p+1) + b_2 I'(p+2) + \dots$$

$$J(p) = bI(p) + \frac{1}{b_0}(b_1 J(p-1) + b_2 J(p-2) + b_3 J(p-3))$$

$$I'(p) = bJ(p) + \frac{1}{b_0}(b_1 I'(p+1) + b_2 I'(p+2) + b_3 I'(p+3))$$

$$b = 1 - \frac{b_1 + b_2 + b_3}{b_0}$$

$$b_0 = 1.57825 + 2.44413q + 1.4281q^2 + 0.422205q^3$$

$$b_1 = 2.44413q + 2.85619q^2 + 1.26661q^3$$

$$b_2 = -1.4281q^2 - 1.26661q^3$$

$$b_3 = 0.422205q^3$$

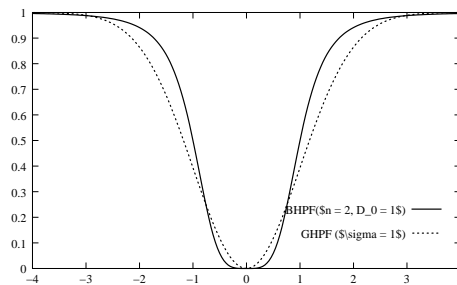
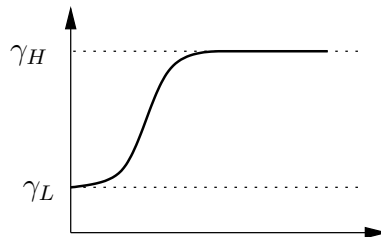
avec

$$q = \begin{cases} 0.98711\sigma - 0.9633 & \text{si } \sigma > 2.5 \\ 3.97156 - 4.14554\sqrt{1 - 0.26891\sigma} & 0.5 \leq \sigma \leq 2.5 \end{cases}$$

4.5 Accentuation des détails**Filtres passe-haut**

$$1 - e^{-D^2(u,v)/2\sigma^2}$$

$$\frac{1}{1 + \left(\frac{D_0}{D(u,v)}\right)^{2n}}$$

**Filtre homomorphe.**

avec $\gamma_L < 1$ et $\gamma_H > 1$.

$$H(u, v) = (\gamma_H - \gamma_L) \left(1 - e^{-c \frac{D^2(u, v)}{D_0^2}} \right) + \gamma_L$$

Approche dérivative : ajout du laplacien

$$\Delta I = \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 I}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial i^2}(i, j) = I(i+1, j) + I(i-1, j) - 2I(i, j)$$

$$\begin{aligned} \Delta I(i, j) &= 2I(i, j) - I(i+1, j) - I(i-1, j) + 2I(i, j) - (i, j+1) - (I(i, j-1)) \\ &= 4I(i, j) - I(i+1, j) - I(i-1, j) - I(i, j+1) - I(i, j-1) \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

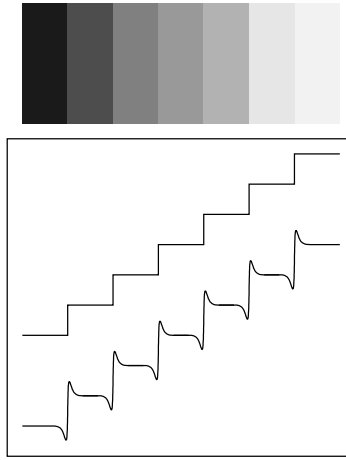
$\bar{I} + K\Delta\bar{I}$:

$$K = 1 : \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 9 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$K = 2 : \quad \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 9 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & 17 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

Exemple en 1D. $[-1 \ 2 \ -1]$ et $[-1 \ 3 \ -1]$:

$$\begin{array}{l} I : 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 5 \ 5 \ 5 \ 5 \ 6 \ 6 \ 6 \ 6 \ 6 \ 6 \ 3 \ 3 \ 3 \\ \Delta I : 0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 3 \ -3 \ 0 \ 0 \\ I + \Delta I : 0 \ 0 \ -1 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 6 \ 5 \ 5 \ 5 \ 4 \ 7 \ 6 \ 6 \ 6 \ 6 \ 9 \ 0 \ 3 \ 3 \ 3 \end{array}$$



Soustraction d'une image lissée

$$I'(i, j) = \frac{I(i, j) - \alpha \bar{I}(i, j)}{1 - \alpha}$$

Sélecteur (*toggle mapping*)

$$\kappa^1(x) = \begin{cases} \psi_2(x), & \text{si } \psi_2(x) - I(x) < I(x) - \psi_1(x), \\ \psi_1(x), & \text{sinon.} \end{cases}$$

Opérateur de contraste naturel

$$\Psi_N = \frac{1}{N} \times \sum_{i=1}^N \Psi_i$$

4.6 Le modèle retinex

Transformation de base. Pour $x \in \{R, G, B\}$, on définit la transformation

$$\log I_x(i, j) - \log(G * I_x)(i, j)$$

$$G(i, j) = ke^{-\frac{i^2+j^2}{\sigma^2}} \quad \text{t.q.} \quad \sum_i \sum_j G(i, j) = 1$$

Transformation multiéchelle.

$$R_x = \sum_k w_k R_{x_k}$$

Paramétrage empirique :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 15 & w_1 &= \frac{1}{3} \\ \sigma_2 &= 80 & w_2 &= \frac{1}{3} \\ \sigma_3 &= 250 & w_3 &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Correction de couleur.

$$\alpha_x(i, j) = f\left(\frac{I_x(i, j)}{\sum_y I_y(i, j)}\right)$$

$$R_x(i, j) = \alpha_x(i, j) \sum_k w_k (\log I_x(i, j) - \log [(G_k * I_x)(i, j)])$$

4.7 Effets spéciaux

Pixelisation

Lueur douce (*Soft glow*)

$$\frac{1}{1 + e^{-\lambda(x-0.5)}}$$

Relief (*Emboss*)

$$\frac{1}{8} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Vent (*wind*)

Peinture à l'huile (*Oil painting*)

$$I'_c(p) = \frac{1}{|V|} \sum_{p \in V} w(I_c(p)) I_c(p)$$

$$w(i) = \left(\frac{h_c(i)}{H_c}\right)^k$$

$$I'_c(p) = \frac{1}{|V|} \sum_{p \in V} w(p) I_c(p)$$

Bibliographie

- [1] Al Bovik, editor. *Handbook of Image and Video processing*. Academic Press, 2000.
- [2] S. Bres, J.-M. Jolion, and F. Lebourgeois. *Traitement et analyse des images numériques*. Hermès Lavoisier, 2003.
- [3] J.-P. Cocquerez and S.Philips, editors. *Analyse d'images : filtrage et segmentation*. Masson, 1995.
- [4] M. Frigo and S.G. Johnson. Fftw version 3.1. <http://www.fftw.org/fftw3.pdf>.
- [5] J. Gomes and L. Velho. *Image Processing for Computer Graphics*. Springer, 1997.
- [6] R.C. Gonzalez and P. Woods. *Digital Image Processing*. Addison-Wesley, 2002. Second edition.
- [7] B Jähne. *Digital Image Processing – Concepts, Algorithms, and Scientific Application – third edition*. Springer, 1995.
- [8] K. Kilander and O. Kilander. *The Gimp User Manual*. Coriolis, 1999.
- [9] J.C. Russ. *The Image Processing Handbook*. CRC Press, 2002. Fourth edition.
- [10] P. Soile. *Morphological Image Analysis – principles and application*. Springer, 2003. Second edition.
- [11] A. Watt and F.Policarpo. *The Computer Image*. Addison-Wesley, 1998.

CHAPITRE 5

CORRECTION DE DÉFAUTS

5.1 Correction de l'illumination

$$B(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4y^2 + a_5xy$$

5.2 Suppression du bruit

Caractérisation

$$g(x, y) = f(x, y) + \nu(x, y)$$

$$g(x, y) = f(x, y) \times \nu(x, y)$$

$$g(x, y) = f(x, y) * \nu(x, y)$$

- bruit uniforme

$$p_\nu(z) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq z \leq b \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- bruit impulsionnel (ou poivre et sel)

$$p_\nu(z) = \begin{cases} P_a & \text{si } z = a \\ P_b & \text{si } z = b \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- bruit gaussien

$$p_\nu(z) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}} & \text{si} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- bruit de Rayleigh

$$p_\nu(z) = \begin{cases} \frac{2}{b}(z-a)e^{-\frac{(z-a)^2}{b}} & \text{si } z \geq a \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- bruit d'Erlang (gamma)

$$p_\nu(z) = \begin{cases} \frac{a^b z^{b-1}}{(b-1)!} e^{-az} & \text{si } z \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- bruit exponentiel

$$p_\nu(z) = \begin{cases} ae^{-az} & \text{si } z \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

5.2.1 Bruit apériodique

Moyennage d'images

$$\bar{g}(x, y) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M g_i(x, y)$$

$$E\{\bar{g}(x, y)\} = f(x, y)$$

Filtres moyenneurs

– arithmétique

$$J(p) = \frac{1}{N} \sum_{p \in V} I(p)$$

– géométrique

$$J(p) = \left(\prod_{p \in V} I(p) \right)^{\frac{1}{N}}$$

– harmonique

$$J(p) = \frac{N}{\sum_{p \in V} \frac{1}{I(p)}}$$

– contre-harmonique

$$J(p) = \frac{\sum_{p \in V} I(p)^{Q+1}}{\sum_{p \in V} I(p)^Q}$$

Filtre passe-bas pondéré

$$I'(i, j) = K \int_{-\infty}^{+\infty} I(i, j - k) G_{\sigma}(k) dk$$

où $G_{\sigma}(k) = e^{-\frac{k^2}{2\sigma^2}}$ et K est une constante de normalisation de la gaussienne ($K = \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} G_{\sigma}(k) dk}$)

$$I'(i, j) = K(i, j) \int_{-\infty}^{+\infty} I(i, j - k) G_{\sigma_s}(k) G_{\sigma_a}(|I(i, k) - I(i, j)|) dk$$

avec

$$K(i, j) = \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} G_{\sigma_s}(k) G_{\sigma_a}(|I(i, k) - I(i, j)|) dk}$$

Filtre statistique adaptatif

$$I'(p) = I(p) - \frac{\sigma_V^2}{\sigma_V^2} (I(p) - \mu_V)$$

avec :

- σ_V^2 la variance estimée du bruit
- σ_V^2 la variance locale, calculée sur le voisinage V
- μ_V la moyenne locale, calculée sur le voisinage V

Filtres d'ordre

Suite i_j des intensités sur une fenêtre de taille L .

$$I'(i, j) = \sum_{k=1}^L c_k i_{(k)} \quad \text{avec} \quad \sum_{k=1}^L c_k = 1$$

médian standard : $c_k = 1$ si $k = \frac{L+1}{2}$.

filtre milieu : $c_1 = c_L = \frac{1}{2}$, et $c_i = 0$ pour $i \neq 0$ et $i \neq L$.

filtre à moyenne tronquée : $c_k = \frac{1}{2p+1}$ pour $\frac{L+1}{2} - p \leq k \leq \frac{L+1}{2} + p$ et 0 sinon.

Filtre médian pondéré.

$$k \diamond x = \overbrace{\{x, \dots, x\}}^k$$

$$w = \{w_1, \dots, w_L\}$$

$$\{w_1 \diamond i_1, \dots, w_L \diamond i_L\} = \{i'_1, \dots, i'_{L'}\} \longrightarrow \{i'_{(1)}, \dots, i'_{(L')}\}$$

– Filtre médian adaptatif

soit V un voisinage

tant que $M_V(p) = \min_V(I, p)$ ou $M_V(p) = \max_V(I, p)$

{

 accroître la taille de V

 si la taille V est maximale

 retourner $I(p)$

}

si $I(p) \neq \min_V(I, p)$ et $I(p) \neq \max_V(I, p)$

 retourner $I(p)$

sinon

 retourner $M_V(I, p)$

Bruit périodique

Rejet de bande. La bande à rejeter est de rayon D_0 et de largeur W .

– Idéal :

$$H(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{si } D(u, v) < D_0 - \frac{W}{2} \\ 0 & \text{si } D_0 - \frac{W}{2} < D(u, v) < D_0 + \frac{W}{2} \\ 1 & \text{si } D(u, v) > D_0 + \frac{W}{2} \end{cases}$$

– Butterworth :

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + \left(\frac{D(u, v)W}{D^2(u, v) - D_0^2} \right)^{2n}}$$

– Gaussien :

$$H(u, v) = 1 - e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{D^2(u, v) - D_0^2}{D(u, v)W} \right)^2}$$

Rejet d'encoche. Rejet des fréquences dans un disque de rayon D_0 , centré en (u_0, v_0) (et par symétrie en $(-u_0, -v_0)$).

$$D_1(u, v) = \sqrt{\left(u - \frac{M}{2} - u_0\right)^2 + \left(v - \frac{N}{2} - v_0\right)^2}$$

$$D_2(u, v) = \sqrt{\left(u - \frac{M}{2} + u_0\right)^2 + \left(v - \frac{N}{2} + v_0\right)^2}$$

où (M, N) est la taille de l'image.

– Idéal :

$$H(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{si } D_1(u, v) \leq D_0 \text{ or } D_2(u, v) \leq D_0 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

– Butterworth :

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + \left(\frac{D_0^2}{D_1(u, v)D_2(u, v)} \right)^{2n}}$$

– Gaussien :

$$H(u, v) = 1 - e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{D_1(u, v)D_2(u, v)}{D_0^2} \right)^2}$$

5.2.2 Approche morphologique

5.3 Modélisation de la dégradation – filtrage inverse

5.3.1 Problématique

$$\begin{aligned} f'(i, j) &= h(i, j) * f(i, j) + \nu(i, j) \\ F'(i, j) &= H(u, v)F(u, v) + N(u, v) \end{aligned}$$

5.4 Filtrage inverse (déconvolution)

5.4.1 Estimation de la fonction de déformation

Mouvement. Si $i_0(t)$ et $j_0(t)$ décrivent le mouvement du système d'acquisition en fonction du temps et si T est le temps de l'acquisition, on a :

$$\begin{aligned} f'(i, j) &= \int_0^T f(i - i_0(t), j - j_0(t)) dt \\ H(u, v) &= \int_0^T e^{-2i\pi(ui_0(t) + vj_0(t))} dt \end{aligned}$$

Par exemple,

$$\begin{aligned} i_0(t) &= \frac{at}{T} \\ j_0(t) &= \frac{bt}{T} \\ H(u, v) &= \frac{T}{\pi(ua + vb)} \sin(\pi(ua + vb)) e^{-i\pi(ua + vb)} \end{aligned}$$

Atténuation. Modèle basé sur les caractéristiques physiques des turbulences atmosphériques :

$$H(u, v) = e^{-k(u^2 + v^2)^{\frac{5}{6}}}$$

5.4.2 Prise en compte du bruit

Problématique

$$\hat{F}(u, v) = \frac{F'(u, v)}{H(u, v)}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{H(u, v)F(u, v) + N(u, v)}{H(u, v)} \\
 &= F(u, v) + \frac{N(u, v)}{H(u, v)}
 \end{aligned}$$

Filtre de Wiener

$$\hat{F}(u, v) = \frac{1}{H(u, v)} \times \frac{|H(u, v)|^2}{|H(u, v)|^2 + \frac{|N(u, v)|^2}{|F(u, v)|^2}} \times F'(u, v)$$

avec :

- $|H(u, v)|^2$: produit de $H(u, v)$ par son complexe conjugué
- $|F(u, v)|^2$: spectre de puissance de l'image initiale
- $|N(u, v)|^2$: spectre de puissance du bruit

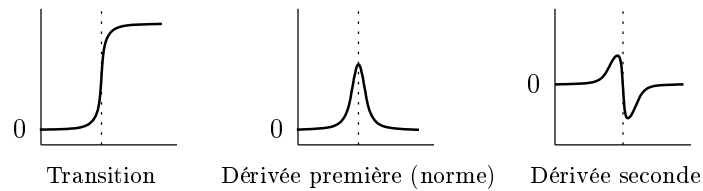
Approximation :

$$\hat{F}(u, v) = \frac{1}{H(u, v)} \times \frac{|H(u, v)|^2}{|H(u, v)|^2 + K} \times F'(u, v)$$

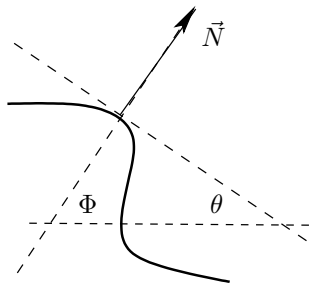
CHAPITRE 6

EXTRACTION DES CONTOURS

6.1 Principe général des méthodes dérivatives



Courbe de niveau : $I(x, y) = \text{constante}$.



Gradient

$$\nabla I(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial I}{\partial x} \\ \frac{\partial I}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$|\nabla I(i, j)| = \sqrt{\left(\frac{\partial I}{\partial i}\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial j}\right)^2}$$

$$|\nabla I(i, j)| = \max\left\{\left|\frac{\partial I}{\partial i}\right|, \left|\frac{\partial I}{\partial j}\right|\right\}$$

$$|\nabla I(i, j)| = \left|\frac{\partial I}{\partial i}\right| + \left|\frac{\partial I}{\partial j}\right|$$

$$\Phi = \arctan\left(\frac{\frac{\partial I}{\partial y}}{\frac{\partial I}{\partial x}}\right)$$

$$\vec{N} = \begin{pmatrix} \cos \Phi \\ \sin \Phi \end{pmatrix}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \Phi$$

Dérivées directionnelles

$$\frac{\partial I}{\partial \vec{N}} = \nabla(x, y) \vec{N} = \frac{\partial I}{\partial x} \cos \Phi + \frac{\partial I}{\partial y} \sin \Phi$$

Extremum suivant \vec{N}

$$\frac{\partial^2 I}{\partial \vec{N}^2} = \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} \cos^2 \Phi + 2 \frac{\partial^2 I}{\partial x \partial y} \cos \Phi \sin \Phi + \frac{\partial^2 I}{\partial y^2} \sin^2 \Phi$$

Laplacien

$$\Delta I(x, y) = \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 I}{\partial y^2}$$

6.2 Opérateur dérivatifs du premier ordre

Opérateurs de Prewitt et Sobel

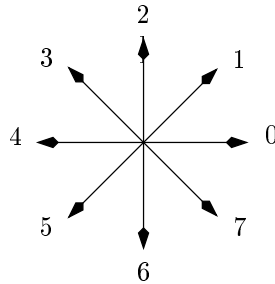
$$f_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad f_j = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$f_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad f_j = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \times [1 \quad 0 \quad -1]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \times [1 \quad 2 \quad 1]$$

Opérateur de Kirsch



$$f_0 = \begin{bmatrix} -3 & -3 & 5 \\ -3 & 0 & 5 \\ -3 & -3 & 5 \end{bmatrix}, \quad f_1 = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 5 \\ -3 & 0 & 5 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix}, \quad f_2 = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \\ -3 & 0 & -3 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix}, \dots$$

$$\Phi = \frac{\pi}{4} \operatorname{argmax}_{k=0,7} \{|f_k * I(i, j)|\}$$

Croix de Roberts

$$\begin{aligned}
- D_1 &= I(i, j+1) - I(i+1, j) \\
- D_2 &= I(i, j) - I(i+1, j+1) \\
- D &= \sqrt{D_1^2 + D_2^2}
\end{aligned}$$

Opérateur MDIF

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & 11 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Filtrage optimal (Deriche)

Filtre de dérivation ($D(t) = -cte^{-\alpha|t|}$)

$$\begin{aligned}
I^+(t) &= aI(t) - b_1I^+(t-1) - b_2I^+(t-2) \\
I^-(t) &= -aI(t+1) - b_1I^-(t+1) - b_2I^-(t+2) \\
I^D(t) &= I^-(t) + I^+(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a &= ce^{-\alpha} \\
b_1 &= -2e^{-\alpha} \\
b_2 &= e^{-2\alpha} \\
c &= \frac{(1 - e^{-\alpha})^2}{e^{-\alpha}}
\end{aligned}$$

Filtre de lissage ($L(t) = k(\alpha|t| + 1)e^{-\alpha|t|}$)

$$\begin{aligned}
I^+(t) &= a_0I(t) + a_1I(t-1) - b_1I^+(t-1) - b_2I^+(t-2) \\
I^-(t) &= a_2I(t+1) + a_3I(t+2) - b_1I^-(t+1) - b_2I^-(t+2) \\
I^L(t) &= I^-(t) + I^+(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_0 &= k \\
a_1 &= k(\alpha - 1)e^{-\alpha} \\
a_2 &= k(\alpha + 1)e^{-\alpha} \\
a_3 &= -ke^{-2\alpha} \\
b_1 &= -2e^{-\alpha} \\
b_2 &= e^{-2\alpha} \\
k &= \frac{(1 - e^{-\alpha})^2}{1 + 2\alpha e^{-\alpha} - e^{-2\alpha}}
\end{aligned}$$

$$I_x^+(i, j) = a_0I(i, j) + a_1I(i, j-1) - b_1I^+(i, j-1) - b_2I^+(i, j-2)$$

$$I_x^-(i, j) = a_2 I(i, j+1) + a_3 I(i, j+2) - b_1 I^-(i, j+1) - b_2 I^-(i, j+2)$$

$$I_x^L(i, j) = I_x^-(i, j) + I_x^+(i, j)$$

$$I_x = (I * L_y) * D_x$$

$$I_y = (I * L_x) * D_y$$

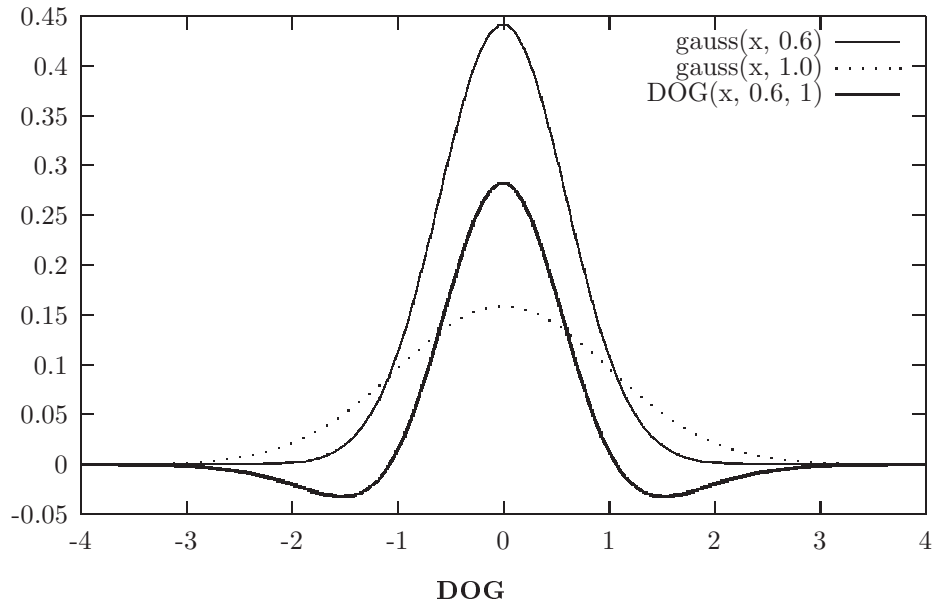
6.3 Opérateur dérivatifs du second ordre

Laplacien de gaussienne (LOG) – Marr et Hildreth

$$\begin{aligned} M(x, y) &= \Delta G_\sigma \\ &= \frac{\partial^2 G_\sigma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G_\sigma}{\partial y^2} \\ &= 1 - \frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2} \exp^{-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}} \end{aligned}$$

Différence de gaussiennes (DOG)

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \quad \sigma = 1 \\ g_2 &= \frac{1}{2\pi \times 0.6^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2 \times 0.6^2}\right) \quad \sigma = 0.6 \\ g &= g_2 - g_1 \end{aligned}$$



6.4 Extraction des contours

6.5 Gradients morphologiques

- 1) Gradient de Beucher : $\rho_B(f) = \delta_B(f) - \varepsilon_B(f)$
- 2) $\rho_B^+(f) = \delta_B(f) - f$
- 3) $\rho_B^-(f) = f - \varepsilon_B(f)$